Technische Universität Darmstadt

Institut für Volkswirtschaftslehre
Fachgebiet Wirtschaftstheorie
Prof. Dr. Volker Caspari

Seminararbeit

Finanzmarkttheorie:
Das Capital Asset Pricing Modell

Juni 1998

Betreuer:

Dipl. Volkswirt Thomas Werner

Bearbeiter:

Robert Hartung
Matr. Nr. 389064

Achim Fehrenbacher
Matr. Nr. 394004

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Ziele der Portfolio- und Kapitalmarkttheorien

Gegenstand kapitalmarkttheoretischer Modelle ist die Bewertung risikobehafteter Vermögenspositionen auf den Kapitalmärkten unter besonderer Berücksichtigung des mit der Anlage verbundenen Risikos.

Durch die Finanzierungstheorie sind maßgebliche und zugleich praxisrelevante Konzepte im Bereich des Wertpapiermanagements entwickelt worden, so z.B. die Portfoliotheorie von Markowitz oder die Optionsbewertung nach Black und Scholes.

Das Ziel der in dieser Arbeit beschriebenen Portfolio- und Kapitalmarkttheorien ist es, die Märkte für Vermögenswerte zu analysieren und mittels eines mathematischen Modells zu beschreiben. Für diese Analyse ist ein allgemeines Gleichgewichtsmodell erforderlich.[1] Im Grundlagenteil der Arbeit wird das Marktmodell für Gleichgewicht bei Sicherheit und bei Unsicherheit kurz beschrieben. Des weiteren wird die, für die nachfolgenden Kapitel notwendige, mathematische Herleitung der Arbitragepreisbildung dargestellt sowie das Arrow und Debreu Marktmodell eingeführt.

Das dritte Kapitel befaßt sich mit der Risikoreduktion durch Diversifikation sowie der von Markowitz entwickelten Theorie über effiziente Portfolien.

Im vierten Kapitel werden schließlich die in der Praxis relevanten einperiodischen Asset-Pricing Theorien, insbesondere das Capital-Asset-Pricing-Modell (CAPM) und die Arbitrage-Pricing-Theory (APT), dargestellt, sowie ein Einblick in mehrperiodische Asset-Pricing Theorien gegeben. Die beschriebenen Asset-Pricing Modelle werden in der Praxis angewendet, um das Verhalten von Anlegern auf den Kapitalmärkten zu analysieren und beschreiben und hieraus (theoretische) Preise für die an den Kapitalmärkten gehandelten Wertpapiere abzuleiten.

1 Vgl. Varian, H. (1994): S. 372.

1.2 Ein kurzer historischer Überblick der Entwicklung der Finanzmarkttheorie

Erste Modelle der Finanzmarkttheorie wurden Anfang der 50er Jahre von Arrow und Debreu entwickelt. Es handelte sich hierbei um erste Annahmen wie das ökonomische Marktmodell bei Sicherheit für die Anwendung bei Unsicherheit erweitert werden kann. Hierzu wurde der Entscheidungsraum um zukünftige unsichere Zustände erweitert und mittels eines mathematischen Modells beschrieben. Ebenfalls in den fünfziger Jahren entwickelten Modigliani und Miller eine Theorie über die Änderung der Dividenden- bzw. Zinshöhe von Aktien (equity) und festverzinslichen Wertpapieren (dept) eines Unternehmens bei einer Veränderung der Finanzierungsstruktur (dept-equity-swap) des Unternehmens unter der Annahme der Nichtexistenz von risikolosen Arbitragegewinnen.

Einen weiteren Meilenstein bei der Entwicklung der Kapitalmarkttheorie lieferte Markowitz mit seiner Theorie der Portfoliodiversifikation zur Reduzierung des Portfoliorisikos.[2]

In den 60er Jahren gab es zwei große Weiterentwicklungen im Bereich der Kapitalmarkttheorie. Hirshleifer übertrug das Arrow-Debreu-Modell auf grundlegende Probleme der Finanzmärkte.[3] Sharpe, Lintner und Mossin[4] zeigten, wie das Modell von Markowitz auf ein allgemeines Marktmodell bei Gleichgewicht angewendet werden kann. Die Kernaussage ihrer Arbeiten ist, daß jeder Anleger an den Kapitalmärkten sein individuelles Portfolio durch eine Linearkombination eines risikolosen Wertpapieres und dem Marktportfolio abbilden kann. Das Modell von ihnen entwickelte Modell ist unter dem Namen CAPM-Modell bekann.

Von Merton wurde das von Sharpe-Lintner-Mossin-entwickelte einperiodische CAPM zu einem mehrperiodischen Modell weiterentwickelt.[5]

---

[2] Vgl. Markowitz, H. (1959); auf diese Theorie wird in Kapitel 0 noch näher eingegangen.

[3] Vgl. Hirshleifer, J (1965).

[4] Vgl. Sharpe, W. (1964), Lintner, J. (1965) und Mossin, J. (1966).

[5] Vgl. Merton, R. (1973).

2 Grundlagen

Ziel der Analyse von Märkten für Vermögenswerte ist die Ermittlung des Preises der Vermögenswerte bzw. die zu erwartende Rendite. Grundlegend für diese Analyse sind die folgenden drei Aspekte:

- Gleichgewichtsmodelle bei Sicherheit und Unsicherheit
- Arbitragepreisbestimmung
- Arrow und Debreu Marktmodell

2.1 *Gleichgewicht bei Sicherheit*

In einer „sicheren Welt“ ist der zukünftige Wert eines Anlagegutes gleich dem abgezinsten Gegenwartswert der Erträge aus diesem Anlagegut. Den Gegenwartswert erhält man, indem die künftigen Zahlungen auf den Betrachtungstag mit Hilfe eines Kalkulationszinses abgezinst werden. Dies geschieht mit Hilfe folgender Formel:[6]

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{Z_t}{(1+i)^t}$$

t:	Einzelne Perioden von 1 bis n
V_0:	Gegenwartswert
Z_t:	Zahlungsüberschüsse (Einzahlungen – Auszahlungen) im Zeitpunkt t
i	Verwendeter Kalkulationszinsfuß bzw. Ertragsrate

Gleichung 2-1

Diese Gleichung muß bei Gleichgewicht erfüllt sein, da sich andernfalls risikolose Arbitragegewinne realisieren ließen. Wird die Betrachtung auf das Zwei-Perioden-Modell beschränkt, so vereinfacht sich die Formel zu:[7]

[6] Vgl. Perridon, L. / Steiner, M. (1988): S. 51.
[7] Vgl. Varian, H. (1994): S. 372.

$$V_0 = \frac{Z_1}{(1+i)}.$$

Gleichung 2-2

Gleichgewicht bei Sicherheit bedeutet daher, daß alle Vermögensgegenstände mit einem sicheren Ertrag den gleichen Ertrag haben müssen.

2.2 Gleichgewicht bei Unsicherheit

Die Ermittlung eines Gleichgewichtspreises bei Sicherheit ist für praxisrelevante Aussagen unbrauchbar. Daher muß ein Modell für die Bestimmung des Gleichgewichtspreises bei Entscheidung unter Unsicherheit entwickelt werden.

Grundlegend für ein solches Modell ist das von Arrow und Debreu entwickelte Marktsystem. Dieses System basiert auf dem eindimensionalen Modell, welches um mögliche zukünftige Zustände (*S*) der Marktentwicklung erweitert wurde (vgl. Abbildung 1).

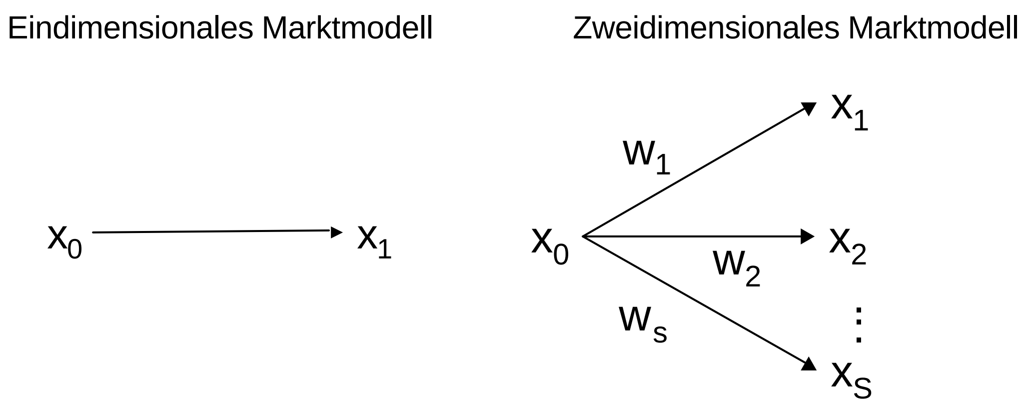


Abbildung 1: Zweiperiodische Marktmodelle[8].

Mit diesen S-Zuständen ist es möglich die Unsicherheit zu modellieren. Hierzu wird eine Zufallsvariable X_{ts} definiert, welche mit der Wahrscheinlichkeit w_s den Wert X_{ts} annimmt. Überträgt man dieses Modell auf die Nutzenfunktion eines Konsumenten, so ergibt sich folgende Form:[9]

---

[8] Vgl. Milne, F. (1995): S. 89.

[9] Vgl. Milne, F. (1995): S. 21.

$$U(x_0, x_1 ... x_S) = \sum_{j=1}^{S} u(x_0, x_j) w_j$$

Gleichung 2-3: Nutzenfunktion bei Unsicherheit.

Mögliche Nutzenfunktionen *u(x)* sind hierbei:[10]

$$\begin{aligned} u(x) &= d(x_s + a)^c \quad &&\text{für } 0 < c < 1 \\ u(x) &= l \ln(dx_s + a) \quad &&a > 0 \\ u(x) &= l \exp(dx_s) \quad &&l, d < 0 \end{aligned}$$

Gleichung 2-4

Abbildung 2 veranschaulicht die Konstruktion einer Indifferenzkurve in der Konsumbündelebene (x_1, x_2) aus den Nutzenfunktionen $u(x_1)$ und $u(x_2)$.[11]

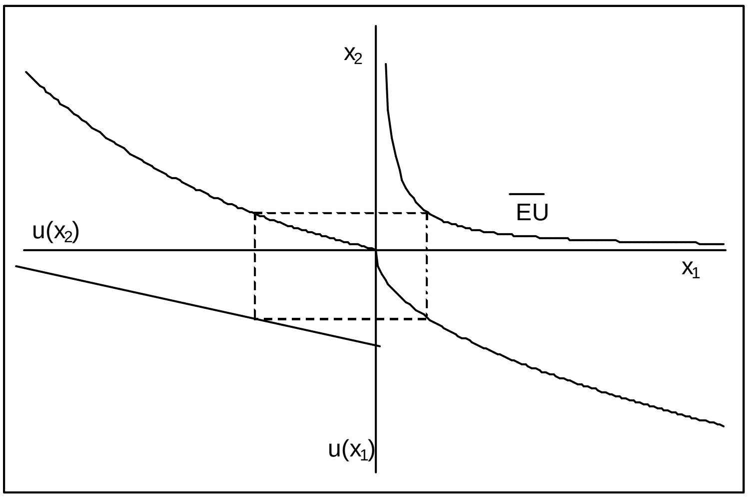


Abbildung 2: Konstruktion der Indifferenzkurve in der x_1, x_2 – Ebene.

2.3 Arbitragepreisbestimmung

Im Zwei-Perioden-Fall ergibt sich aus diesen Gleichungen für den Konsumenten das Maximierungsproblem:

---

[10] Vgl. Milne, F. (1995): S. 22.

[11] Vgl. Milne, F. (1995): S. 22.

$$Max\,U(x_0, x_1, \ldots x_S) \qquad x_s \geq 0$$

$$Nebenbedingung:$$
$$x_s = \sum_{j=1}^{K} Z_{sj} a_j + \overline{x_s} \qquad s = 1 \ldots S$$

Gleichung 2-5

Hierbei stellen die Z_{s1} ... Z_{sk} die Rückzahlungen der K-Vermögenswerte zum Zustand s dar.

$\overline{x}$ ist die verfügbare Ausstattung zum Zustand S.

In Preisen ausgedrückt ergibt sich als weitere Nebenbedingung zum Zeitpunkt t=0 die Budgetrestriktion

$$p_0 x_0 + \sum_{j=1}^{K} p_j a_j = W_0$$

Gleichung 2-6

Durch Umformung erhält man:

$$Max\,V(x_0, a) \qquad x_0, a \geq 0$$

$$Nebenbedingung:$$
$$p_0 x_0 + \sum_{j=1}^{K} p_j a_j = W_0$$

mit

$$V(x_0, a) \equiv U(x_0, \left(\sum_{j=1}^{K} Z_{sj} a_j \right)$$

Gleichung 2-7

Mit diesen Definitionen ist es möglich, die Rolle der Arbitrage bei der Vermögenszuweisung und –preisbildung zu analysieren.

Unter der Annahme der Existenz eines Wertpapieres, dessen Rückfluß eine Linearkombination der Rückflüsse der übrigen, linear unabhängigen Wertpapiere darstellt, so daß gilt

$$\boldsymbol{Z}_1 = \sum_{j=2}^{K} a_j \boldsymbol{Z}_j \quad \{a_j\} \neq \{0\}$$

Gleichung 2-8

Befindet sich der Konsument in einem Optimum, so daß (x_0^*, a^*) das oben angegebene Maximierungsproblem löst (vgl. Gleichung 2-7), dann läßt sich eine Indifferenzoberfläche definieren:

$$S^* \equiv \left\{ a \in \mathbf{R}^K \middle| V(x_0^*, a^*) = \overline{V} \right\}$$

Gleichung 2-9

Somit ergibt sich aus Gleichung 2-8 die durch den Linearfaktor α_1 variierbare Gleichung

$$\boldsymbol{a_1}\boldsymbol{Z}_1 - \sum_{j=2}^{K} a_j \boldsymbol{Z}_j = 0$$

Gleichung 2-10

Unter der durch Gleichung 2-9 definierten Oberfläche ist der Konsument bezüglich der, durch Variation von α_1 sich ergebenden Lösungen, indifferent. Projeziert man die Maxima der durch Gleichung 2-9 gegebenen Oberfläche in die Wertpapierebene, so ergibt sich die Indifferenzkurve für das Nutzenmaximum des Konsumenten wie in Abbildung 3 dargestellt. [12]

[12] Vgl. Milne, F. (1995): S. 38.

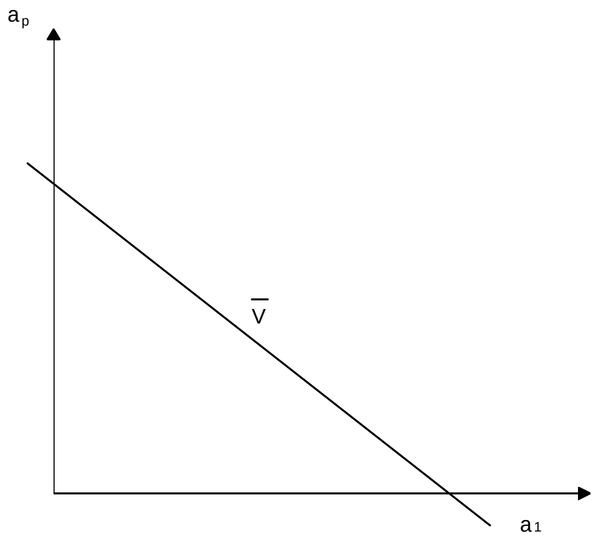


Abbildung 3: Indifferenzkurve für das Nutzenmaximum.

Besteht zwischen dem Preis für das Anlagegut 1 und dem Preis für das Gesamtportfolio nicht das Verhältnis

$$p_1 = \sum_{j=2}^{K} a_j p_j \ ,$$

Gleichung 2-11

so kann der Konsument durch Variation seiner Ausstattung risikolose Arbitragegewinne erzielen. Er wird daher unbegrenzt handeln, und damit die Annahme eines bestehenden Optimums verletzen.

Ist beispielsweise

$$p_1 < \sum_{j=2}^{K} a_1 p_j \ ,$$

dann kostet das Wertpapier 1 weniger als das Portfolio, obwohl beide Varianten die gleichen Rückzahlungen haben und somit für den Konsumenten den gleichen Nutzen darstellen. Der Konsument wird daher seinen Anteil des Wertpapiers 1 erhöhen und seine Portfolioanteile entsprechend reduzieren.[13]

[13] Vgl. Milne, F. (1995): S. 39.

2.4 Arrow und Debreu Marktmodell

Eine Möglichkeit das von Arrow und Debreu entwickelte Modell zu formulieren ist es, die Wertpapiere des Marktes in einer Matrix

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{S1} & \cdots & Z_{SK} \end{bmatrix}$$

zu definieren, deren Zeilen die S zustandsabhängigen Rückflüsse der K Wertpapiere enthalten.

Die von Arrow definierte Rückzahlungsmatix deren Spalten die sogenannten Arrow-Wertpapiere enthält, nimmt folgende Gestalt an:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das j-te Arrow-Wertpapier liefert eine Rückzahlung unter der Bedingung daß Zustand j eintritt. In allen anderen Zuständen beträgt die Rückzahlung des Wertpapiers j gleich null.

Gilt für die Matrix **Z** Rang S = Rang K, d.h. die Matrix ist nicht singulär, so können durch das Halten eines Portfolios mit den Anteilen

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1} & \cdots & a_{SK} \end{bmatrix}$$

der Wertpapiere **Z** die Arrow-Wertpapiere nachgebildet werden:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{S1} & \cdots & Z_{SK} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1} & \cdots & a_{SK} \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Weiterhin ergibt sich der Portfoliopreisvektor $\mathbf{p}_S$ (für die Zustände 1..S) in Abhängigkeit vom Preisvektor der Wertpapiere $\mathbf{p}_K$ zu:

$$\mathbf{p}_S = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1} & \cdots & a_{SK} \end{bmatrix} \bullet \mathbf{p}_K$$

Gleichung 2-12: Portfoliopreis zum Zustand S in Abhängigkeit von den K Wertpapierpreisen.

Zu beachten ist dabei, daß durch die lineare Abhängigkeit zwischen den Matrizen **Z** und **I** alle Marktteilnehmer indifferent bezüglich der Einführung der Arrow-Wertpapiere sind.[14]

Enthält ein Wertpapiermarkt Arrow-Wertpapiere, so kann der Preis für ein oder mehrere neu eingeführte Wertpapiere durch die Gleichung

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_K \bullet \begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1K} & Z_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Z_{S1} & \cdots & Z_{SK} & Z_{Sj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_K & p_j \end{bmatrix}$$

Gleichung 2-13: Preisvektor des Wertpapiers j.

bestimmt werden. Bezüglich der Einführung des neuen Wertpapieres j sind die Marktteilnehmer aufgrund der linearen Abhängigkeit indifferent.

2.5 Definition der zentralen Begriffe der Arbeit

Die erwartete Rendite eines Einzelwertpapieres ergibt sich aus den (unsicheren) Zuflüssen gewichtet mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten bezogen auf das eingesetzte Kapital:

$$\overline{R} = \frac{\sum_{j=1}^{S} Z_j \cdot w_j}{V_0}$$

mit :

$\overline{R}$: erwartete Rendite des Wertpapieres

Z_i : Auszahlung zum Zustand j

w_j : Eintrittswahrscheinlichkeit des Zustands j

V_0 : Gegenwartswert des Wertpapieres

Gleichung 2-14

[14] Vgl. Milne, F. (1988): S. 825.

Die erwartete Rendite eines Portfolios von Wertpapieren ermittelt sich zu:

$$\overline{R}_p = \sum_{j=1}^{K} a_j \cdot \overline{R}_j$$

mit

$\overline{R}_p$: erwartete Portfolior endite

$\overline{R}_j$: erwaretet Rendite des j – ten Wertpapier s

a_j : Anteil des j – ten Wertpapier s am Portfolio

Gleichung 2-15

Die Varianz der erwarteten Rendite eines Einzelwertpapieres und eines Portfolios von Wertpapieren berechnet wie folgt:

$$\mathrm{var}(R) = \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{S}(R_j - \overline{R})^2$$

$$R_j = \frac{Z_j}{V_0}$$

mit

$\mathrm{var}(R)$: Varianz der Rendite des Einzelwert papieres

$\overline{R}$: erwartete Rendite des Einzelwert papieres

Gleichung 2-16: Varianz eines Einzelwertpapieres.

Varianz eines Portfolios

$$\mathrm{var}(R_p) = \sum_{j=1}^{K} a_j^2 \,\mathrm{var}(R_j) + \sum_{j=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} a_j a_l \,\mathrm{cov}(R_j, R_l)$$

$$\mathrm{cov}(R_j, R_l) = (R_j - \overline{R}_j)(R_l - \overline{R}_l)$$

$$j \neq l$$

mit

$\mathrm{var}(R_p)$: Varianz der Rendite des Portfolios aus K Wertpapier en

$\mathrm{cov}(R_j, R_l)$: Kovarianz zwischen Wertpaier j und l

Gleichung 2-17: Varianz eines Portfolios.

3 Portfoliotheorie

Die Portfoliotheorie liefert Aussagen über die Wahl des optimalen Portfolios unter Beachtung der Präferenzen des jeweiligen Anlegers.

In Kapitel 3.1 werden allgemeine Voraussetzungen und Annahmen der Portefoliotheorie beschrieben. Anschließend werden in Kapitel 3.2 die Grundlagen der Diversifikation zur Risikoreduktion sowie die Konstruktion von Markowitz-Effizienten Portfolios erläutert. In Kapitel 0 wird abschließend das mathematische Modell zur Begründung der Diversifikation entwickelt.

3.1 Allgemeine Voraussetzungen und Annahmen

Die Portfoliotheorie geht von zwei Annahmen bezüglich eines Anlegers aus:

1. Der Anleger trifft seine Entscheidungen ausschließlich auf Grundlage der beiden Parameter Risiko und Rendite.
2. Der Anleger ist risikoavers, d.h. er strebt bei vorgegebenem Risiko eine Renditemaximierung bzw. bei vorgegebener Rendite eine Risikominimierung an.

Das Risiko kann definiert werden als die negative Abweichung der zukünftigen Rendite des Vermögensgegenstandes von der erwarteten Rendite.[15] Ein Maß für das Risiko ist daher die Wahrscheinlichkeit für alle Zustände, die eine geringere als die erwartete Rendite ergeben. Die Anwendung dieser einseitigen Risikomessung ist schwierig und nicht notwendig, sofern der Wahrscheinlichkeitsverteilung eine symmetrische Funktion zugrunde liegt.[16]

Dieser Sachverhalt soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Für das in Abbildung 4 dargestellt Wertpapier errechnet sich die erwartete Rendite zu:

$$\overline{R} = 0{,}1(50\%) + 0{,}2(30\%) + 0{,}4(10\%) + 0{,}2(-10\%) + 0{,}1(-30\%)$$
$$\overline{R} = 10\%$$

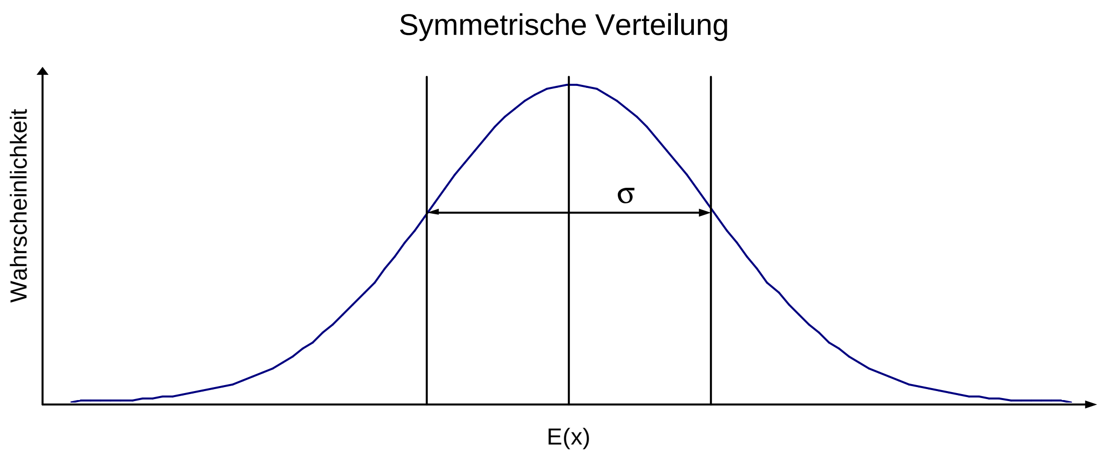
[15] Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 167.

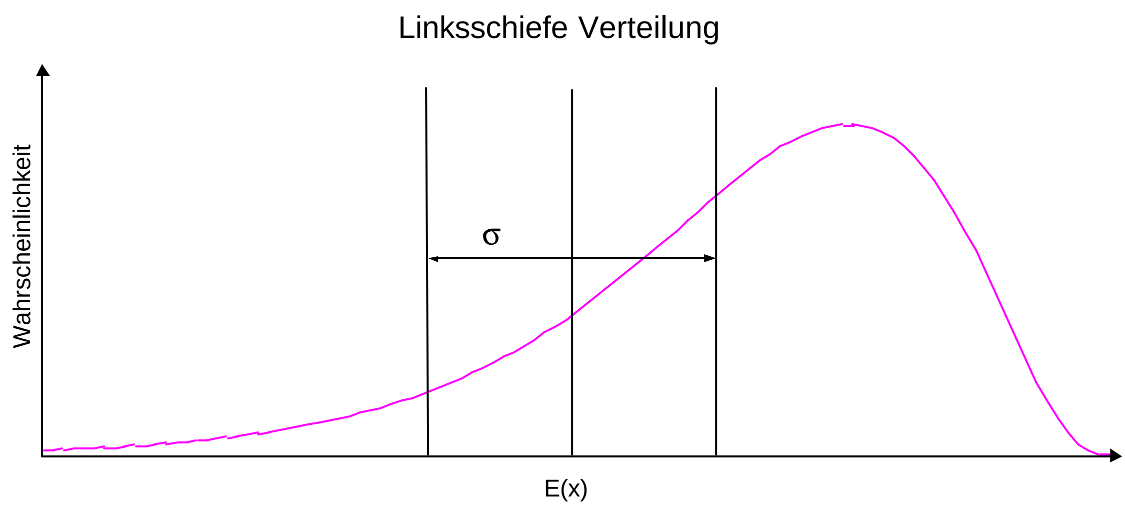
Zustand	Rendite	Wahrscheinlichkeit
1	50%	0,1
2	30%	0,2
3	10%	0,4
4	-10%	0,2
5	-30%	0,1

Abbildung 4: Zustand, Rendite und Wahrscheinlichkeit am Beispiel.

Auf das Beispiel aus Abbildung 4 bezogen bedeutet dies, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 die Rendite des Anlagegutes kleiner als die erwartete Rendite wird.

Abbildung 5 zeigt drei mögliche Verteilungen: Eine symmetrische, eine links- und eine rechtsseitig schiefe Verteilung.





16 Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 168/169.

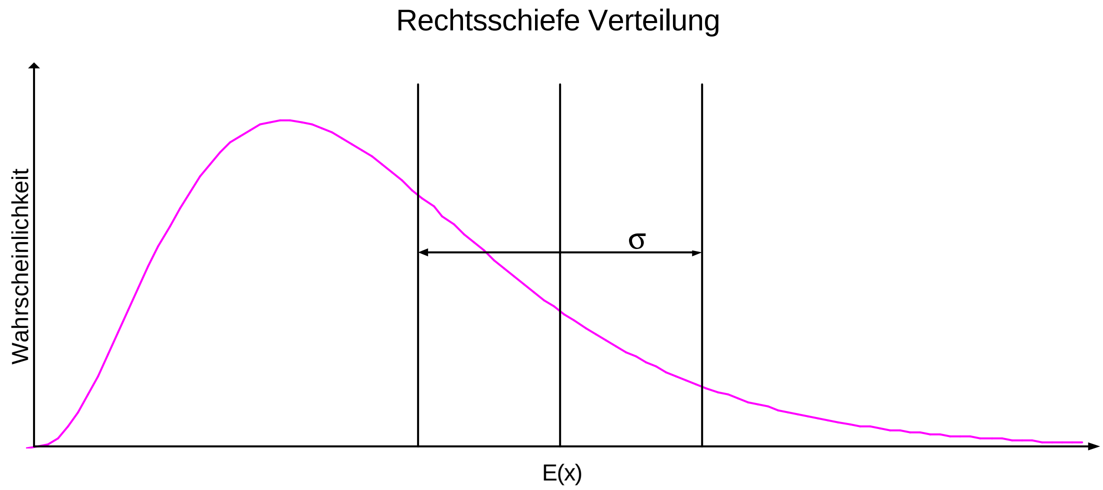


Abbildung 5: Verteilungsfunktionen

Bei einer genügend großen Anzahl von Zufallsvariablen nähert sich jede Verteilung nach dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik asymptotisch einer Normalverteilung an.[17] Somit kann die zweiseitige Abweichung von der erwarteten Rendite als Risikomaß verwendet werden. Dies entspricht bei einer Normalverteilung der Varianz var(R).[18]

3.2 Diversifikation und Markowitz-Effiziente Portfolios

Ziel der Diversifikation von Anlagekapital auf mehrere Werte bzw. die Bildung von Portfolios ist die Reduktion des Risikos ohne Schmälerung der Rendite. Ein unerwartetes Ergebnis ergaben Auswertungen historischer Daten bzgl. der Rendite diversifizierter Portfolios:

> Obwohl die Varianz der Rendite und damit das Risiko eines einzelnen Titels größer als die des Portfolios ist, liegt die durchschnittliche Rendite des Portfolios über der des einzelnen Titels.[19]

Die Erklärung für dieses Ergebnis basiert auf der Feststellung, daß sich das Risiko eines Wertpapieres in zwei Risikoarten aufspalten läßt:[20]

---

[17] Vgl. Bleymüller, J. / Gehlert, G. / Gülicher, H. (1992): S. 78.
[18] Vgl. Nowak, Th. (1994): S. 8,9.
[19] Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 171.
[20] Vgl. Nowak, Th. (1994): S. 11.

- Das systematische, nicht diversifizierbare Risiko.

  Dieser Teil des Risikos bildet das Marktrisiko ab.

- Das unsystematische, diversifizierbare Risiko.

  Es bildet das dem Wertpapier eigene Risiko ab.

Das unsystematische Risiko kann durch Kombination von Wertpapieren in einem Portfolio minimiert bzw. bei optimaler Kombination eliminiert werden.

Die Diversifikation wie oben beschrieben führt zu der Konstruktion eines Portfolios mit der höchsten zu erwartenden Rendite bei gegebenem Risiko, d.h. bei gegebener Varianz. Ein solches Portfolio wird als Markowitz-Effizientes Portfolio bezeichnet.[21]

Mit den oben angegebenen Definitionen[22] für Portfoliorendite und –varianz lassen sich Markowitz-Effiziente Portfolien konstruieren.

Die Menge aller zulässigen Portfolios stellt Abbildung 6 dar. Unter den in Kapitel 3.1 getroffenen Annahmen bezüglich dem Anleger ergibt sich, daß effiziente Portfolios auf der Effizienzkurve, welche in der Abbildung fett ausgezogen ist, liegen. Zu jedem Portfolio unterhalb der Effizienzkurve läßt sich ein Portfolio mit gleichem Risiko jedoch mit höherer Rendite auf der Effizienzkurve finden. Relevant für einen Anleger sind deshalb nur jene Portfolios, die auf der Effizienzkurve liegen.

[21] Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 176.

[22] Vgl. Gleichung 2-15 und Gleichung 2-17.

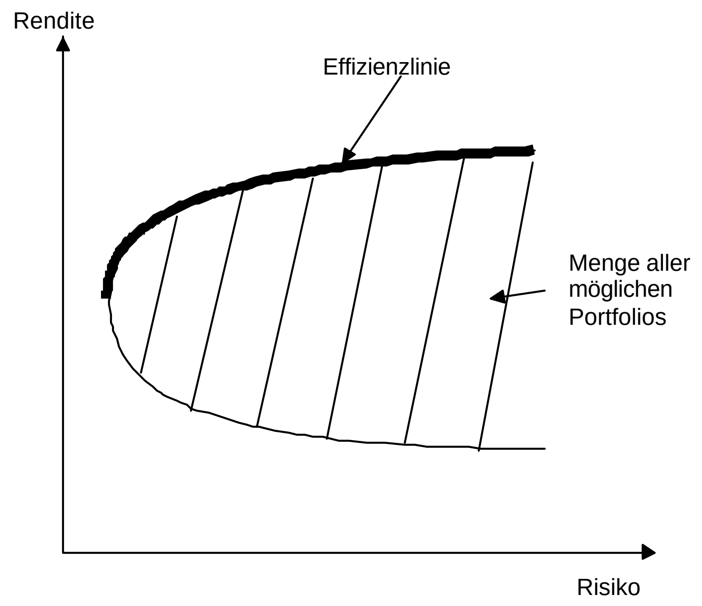


Abbildung 6: Effizienzkurve

Um eine optimale Vermögensaufteilung zu ermitteln, setzt Markowitz zusätzlich folgende Prämissen voraus:

- Transaktionskosten und Steuern existieren nicht.
- Alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.
- Es werden nur zwei Perioden betrachtet (Zwei-Perioden-Modell).

Unter diesen Prämissen und den Formeln für die erwarteten Renditen (Gleichung 2-15) sowie dem Risiko (Gleichung 2-17) leitet Markowitz die dargestellte Effizienzkurve ab.

Dieser Sachverhalt soll am Zwei-Anlagen-Fall verdeutlicht werden:

$$\overline{R}_p = a_1 \overline{R}_1 + a_2 \overline{R}_2$$
$$\mathrm{var}(R_p) = a_1^2 \,\mathrm{var}(R_1) + a_2^2 \,\mathrm{var}(R_2) + 2a_1 a_2 \,\mathrm{cov}(R_1, R_2)$$

Um dem Manko der geringen Anschaulichkeit zu begegnen, wird die Kovarianz durch den Korrelationskoeffizienten substituiert.

$$k_{1,2} = \frac{\text{cov}(R_1, R_2)}{\text{std}(R_1)\text{std}(R_2)}$$

Gleichung 3-1

Damit ergibt sich die Varianz zu:

$$\text{var}(R_p) = a_1^{\,2}\,\text{var}(R_1) + a_2^{\,2}\,\text{var}(R_2) + 2a_1a_2\text{std}(R_1)\text{std}(R_2)k_{1,2}$$

Gleichung 3-2

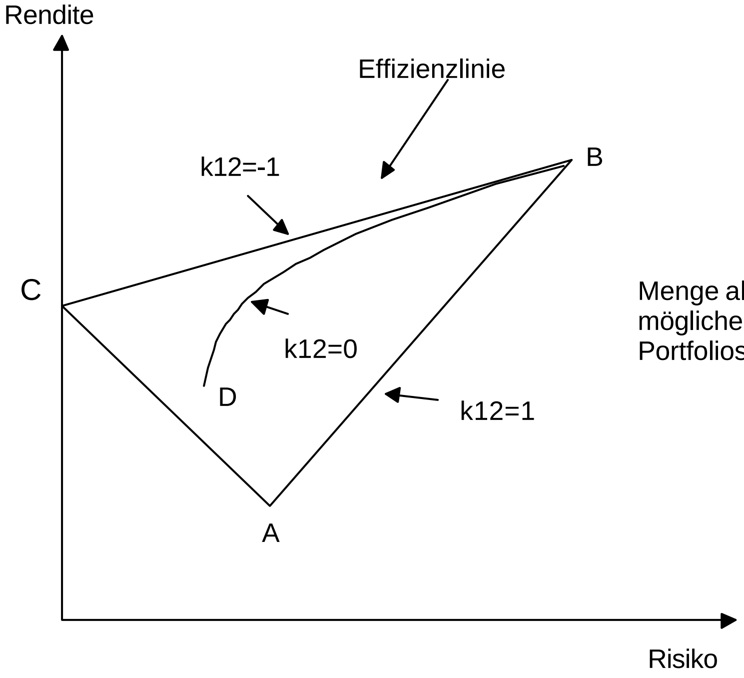


Abbildung 7: Effizienzkurven bei verschiedenen Korrelationskoeffizienten.[23]

Nachfolgend werden die drei markanten Fälle unterschiedlicher Korrelationskoeffizienten in ihrer Wirkung auf die Portfoliorendite und das -risiko erläutert.

k_{12}=1 Die Aufteilung des Vermögens führt nicht zu einer Verringerung des Portfoliorisikos, da es sich additiv aus den gewichteten Einzelstandardabweichungen errechnet. Der graphische Verlauf der Effizienzkurve entspricht der Verbindungslinie in Abbildung 7 zwischen den Punkten A und B.

[23] Quelle: Steiner, M. / Bruns, Chr. (1994): S. 6.

$k_{12}=0$ Die effizienten Portfolien liegen auf der Verbindungslinie zwischen D und B.

$k_{12}=-1$ Im Punkt C ist eine vollständige Elimination des Portfoliorisikos möglich. Die effizienten Portfolien liegen auf der Verbindungslinie zwischen C und B.

Die Wahl des Portfolios auf der Effizienzkurve hängt von der Risikoneigung und damit von der individuellen Nutzenkurve des Anlegers ab.

3.3 Mathematisches Modell zur Herleitung der Diversifikation

Die Erkenntnisse aus den vorhergehenden Kapiteln lassen sich durch ein mathematisches Modell für die Diversifikation erklären.[24] Das Modell basiert auf den Annahmen:

Es werden k Basiswertpapiere mit der linear unabhängigen Rückzahlungsmatrix

$$\mathbf{Z}^* = \begin{bmatrix} Z^*_{11} & \cdots & Z^*_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z^*_{K1} & \dots & Z^*_{KS} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{K1} & \dots & Z_{KS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{K1} & \dots & e_{KS} \end{bmatrix} = \mathbf{Z} + \mathbf{e}$$

Gleichung 3-3

definiert. Dabei beschreibt die Matrix $\mathbf{Z}$ die Rückzahlungen, welche durch das oben spezifizierte systematische Risiko bestimmt werden. Durch die Matrix e werden die durch das unsystematische Risiko bedingten Rückzahlungen beschrieben.

In der Nachfolgenden Modellbeschreibung wird der einfacheren Darstellung halber die Matrixschreibweise für Rückzahlungen, Preise und Anteile verwendet.

Mit den durch die Rückzahlungsmatrix $\mathbf{Z}$ spezifizierten Basiswertpapieren lassen sich linear abhängige Portfolios bilden, deren Rückflüsse folgendermaßen definiert sind:

[24] Vgl. Milne, F. (1995): S. 71-74.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{F1} & \cdots & a_{FK} \end{bmatrix} \bullet \mathbf{Z^*} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{Z} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{e}$$

Gleichung 3-4

Die Portfoliopreise können mittels Arbitragepreisbildung bestimmt werden: [25]

$$\mathbf{p^F} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{p^K}$$

Gleichung 3-5

Durch Umformung von Gleichung 3-4 erhält man:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{a} \bullet \mathbf{Z} = \mathbf{F} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{e} \\ &\mathbf{Z} = \mathbf{a}^{-1} \bullet \mathbf{F} - \mathbf{e} \equiv \mathbf{ß} \bullet \mathbf{F} - \mathbf{e} \\ &\text{mit} \\ &\mathbf{ß} = \mathbf{a}^{-1} \end{aligned}}$$

Gleichung 3-6

Analog zu Gleichung 3-5 können die Basiswertpapierpreise durch die Preise der Portfolien ausgedrückt werden:

$$\mathbf{p^K} = \mathbf{ß} \bullet \mathbf{p^F} - \mathbf{p^e}$$

Gleichung 3-7

Zur Erklärung der Diversifikation sind weitere Annahmen über die Struktur der e–Matrix und der Einstellungen der Anleger bezüglich undiversifizierter Portfolios erforderlich. Das betrachtete Wirtschaftssystem besteht aus den Rückzahlungen definiert durch die Matrizen **Z**, **F** und e, deren Preise durch Arbitrage gebildet werden.

Damit haben die Anleger die Möglichkeit Portfolios zu bilden welche ausschließlich aus den linear abhängigen Wertpapierkombinationen mit der Matrix **F** bestehen. Aus diesen Portfolios wird der Anleger diejenigen auswählen, die die Bedingung

---

[25] Vgl. Kapitel 2.3.

$$\sum_{j=1}^{K} e_{js} \bullet a_{fj} = 0$$

Gleichung 3-8

möglichst gut erfüllen, d.h. die unsystematischen Rückzahlungen wegdiversifizieren.

Eine weitere Annahme ist die Existenz von rückzahlungsäquivalenten Portfolios, die in zwei Klassen eingeteilt werden:

1. Portfolios mit unsystematischem Risiko
2. Portfolios ohne unsystematisches (d.h. wegdiversifiziertem, vgl. Gleichung 3-8) Risiko.

Mit der Nutzenfunktion kann dies folgendermaßen beschrieben werden:

$$V(x_0, \mathbf{a_F} \bullet \mathbf{F} + \mathbf{a_e} \bullet \mathbf{e_j}) < V(x_0, \mathbf{a_F} \bullet \mathbf{F})$$

Gleichung 3-9

Unter der letzten Annahme daß V() differenzierbar ist, kann der zu beweisende Sachverhalt aufgeführt werden. Für einen Anleger, der oben angegebene Annahmen erfüllt und ein diversifizierbares Portfolio im Optimum hält, gilt:

$$\mathbf{p^e} = 0 \text{ und } \mathbf{p^K} = \mathbf{ß} \bullet \mathbf{p^F}$$

Gleichung 3-10

Der Beweis kann folgendermaßen geführt werden:

Wenn ein Anleger ein diversifiziertes Portfolio ($a_{\mathbf{F}}$) hält, dann vermindert er seinen Nutzen durch zusätzliches Halten eines undiversifizierten Portfolios (a_e).[26] Das bedeutet, daß die partielle Ableitung von V() nach a_e im Optimum gleich Null sein muß.

$$\frac{\partial V(x_0, \mathbf{a_e} \bullet \mathbf{e} + \mathbf{a_F} \bullet \mathbf{F})}{\partial \mathbf{a_e}} = 0$$

[26] Vgl. Gleichung 3-9.

Bedient man sich der Langrange-Funktion, dann gilt unter der Verwendung der Variablen λ als Langrange-Multiplikator im Optimum die Gleichung:[27]

$$\frac{\partial V()}{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{e}}} = l\,\mathbf{p}^{\mathbf{e}} \quad ; \quad l > 0$$

Gleichung 3-11

woraus folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{p}^{\mathbf{e}} = 0 \ \text{ und} \\ &\mathbf{p}^{\mathbf{K}} = \mathbf{ß} \bullet \mathbf{p}^{\mathbf{F}} \end{aligned}}$$

Gleichung 3-12

Aus dem oben geführten Beweis ergibt sich die Schlußfolgerung, daß in einem Marktgleichgewicht alle Anleger diversifizierte Portfolien halten.

Gleichung 3-12 wird als allgemeine Arbitrage Pricing Theory (APT) bezeichnet.[28]

[27] Vgl. Varian, H. (1994): S. 502 und Milne, F. (1995): S. 72f.

[28] Vgl. Milne, F. (1995): S. 73.

4 Kapitalmarkttheorie

Die Modelle der Kapitalmarkttheorie gehen davon aus, daß für die Preisfindung von Wertpapieren den Parametern Rendite und Risiko eine zentrale Stellung zukommt.[29] Im Vordergrund der Betrachtung steht die Erklärung der Abweichungen zwischen der zu erwartenden Rendite eines Wertpapieres und dessen Risiko. Welche Rendite bei welchem Risiko erwartet werden darf, versuchen die Modelle der Kapitalmarkttheorie auf unterschiedliche Weise zu klären.

Nachfolgend werden in Kapitel 4.1 allgemeine Annahmen der Kapitalmarkttheorie beschrieben. Anschließend werden die Modelle des Capitel Asset Pricing Models (CAPM), Kapitel 4.2, und der Arbitrage Pricing Theorie (APT), Kapitel 4.3, dargestellt.

4.1 Allgemeine Annahmen

Die Kapitalmarkttheorie setzt einige Annahmen über das Verhalten der Anleger und die Funktionsweise der Kapitalmärkte voraus. Diese Annahmen müssen gemacht werden, um die Theorien mittels eines mathematischen Modells beschreiben zu können.[30]

- Annahmen über das Verhalten der Anleger:[31]

  Annahme 1: Die Anleger begründen ihre Entscheidungen auf zwei Parametern:

  1. Die zu erwartende Rendite des Wertpapiers
  2. Das erwartete Risiko gemessen an der Varianz der Rendite

  Aus diesen Kriterien folgt, daß die Anleger nur bereit sind ein größeres Risiko einzugehen, wenn sie hierdurch eine höhere Rendite erwarten. Dieses Anlegerverhalten wird als Risikoaversion bezeichnet.

---

[29] Vgl. Steiner, M. / Bruns, Chr. (1994): S. 16.

[30] Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 188,189 sowie zu den allgemeinen Annahmen über Kapitalmärkte auch Merton, C. (1973): S. 868,869.

[31] Die Annahmen über das Verhalten der Anleger wurden schon im Kapitel 3 getroffen und sind an dieser Stelle nur der Vollständigkeit halber noch einmal erwähnt.

Annahme 2: Die Kapitalmarkttheorie setzt voraus, daß risikoaverse Anleger die Methode der Diversifikation zur Minimierung des Risikos des Gesamtportfolios kennen und verwenden.

Annahme 3: Die Kapitalmarkttheorie setzt homogene Erwartungen der Anleger bezüglich der Wertpapierrendite voraus (Informationseffizienzhypothese[32]).

- Annahmen über die Kapitalmärkte

Annahme 4: Es besteht ein funktionierender Wettbewerb auf dem Kapitalmarkt. Dies bedeutet, daß es eine sehr große Anzahl von Marktteilnehmern gibt, die nur über geringe Marktanteile verfügen, so daß der Marktpreis als exogen vorgegeben behandelt werden kann, keiner der Marktteilnehmer kann den Marktpreis durch seine Transaktionen beeinflussen.

Annahme 5: Es gibt keine Transaktionskosten und sonstigen Marktbeschränkungen. Der An- und Verkaufspreis für ein Wertpapier ist identisch, so daß keine risikolosen Arbitragegewinne möglich sind (Transaktionskosteneffizienz[33]).

Annahme 6: Es existiert ein risikoloses Wertpapier, in das der Anleger investieren kann. Zugleich kann der Anleger Geld zum Zinssatz des Risikolosen Wertpapieres an Kapitalmarkt aufnehmen.

4.2 Das Capital Asset Pricing Model

Das von Sharpe, Mossin und Lintner entwickelte CAPM baut auf den Erkenntnissen der Portfoliotheorie auf.[34] Dabei wurde der Kerngedanke der Portfoliotheorie aufgegriffen, demzufolge das unsystematische Risiko wegdiversivizierbar ist und deshalb nicht das Gesamtrisiko eines Wertpapiers für dessen Bewertung ausschlaggebend ist. Offen geblieben sind in der Portfoliotheorie aber die Fragen:[35]

---

[32] Vgl. Bundesbank 4/98: S. 64.
[33] Vgl. Bundesbank 4/98: S. 64.
[34] Vgl. Steiner, M. / Bruns, Chr. (1994): S. 16
[35] Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 189ff

- Welche Rendite kann von einem Portfolio im Kapitalmarktgleichgewicht erwartet werden, wenn das Portfolio aus risikolosen und risikobehafteten Wertpapieren zusammengesetzt werden kann?

  Die Anwort auf diese Frage liefert die Kapitalmarktlinie.

- Welcher Gleichgewichtspreis ist einem zum Portfolio gehörenden Wertpapier zuzumessen und welches Risiko ist für ein solches Wertpapier relevant?

  Diese Frage wird durch die Wertpapierlinie beantwortet.

4.2.1 Die Kapitalmarktlinie

Unter der Annahme, daß der Anleger das ihm zur Verfügung stehende Kapital auf eine risikolose Anlagemöglichkeit und ein risikobehaftetes Wertpapierportfolio aufteilen kann, kann er jede beliebige Rendite-Risiko-Kombination zwischen der risikolosen Anlagemöglichkeit und dem Markowitz-Effizienten Portfolio realisieren. Im folgenden wird diese Kombination als der Zwei-Anlage-Fall bezeichnet. Diese individuellen Anlegerportfolios können gemäß der Portfoliotheorie überall auf der Effizienzkurve liegen.[36] Graphisch ergeben sich die individuellen Portfoliogeraden durch die Verbindung des Achsenabschnitts R_f (Rendite des risikofreien Wertpapiers) auf der Ordinate mit den individuellen Portfolios auf der Effizienzkurve. Wie Abbildung 8 zeigt werden jedoch alle möglichen Kombinationen hinsichtlich der Risikoeffizienz von einer Effizienzgeraden dominiert. Diese Gerade wird als die Kapitalmarktlinie bezeichnet und ist durch die Punkte R_f und M determiniert. Das durch den Tangentialpunkt zwischen der Geraten und der Effizienzkurve riskanter Portfolios bestimmte Portfolio M wird im weiteren als das Marktportfolio bezeichnet. Dieses Portfolio ist vollständig diversifiziert. Alle Anleger halten daher eine Linearkombination aus diesem Portfolio und dem risikolosen Wertpapier. Dies folgt unmittelbar aus den oben gemachten Annahmen (insbesondere den Annahmen 2, 3 und 6).

[36] Vgl. Steiner, M. / Bruns, Chr. (1994): S. 17.

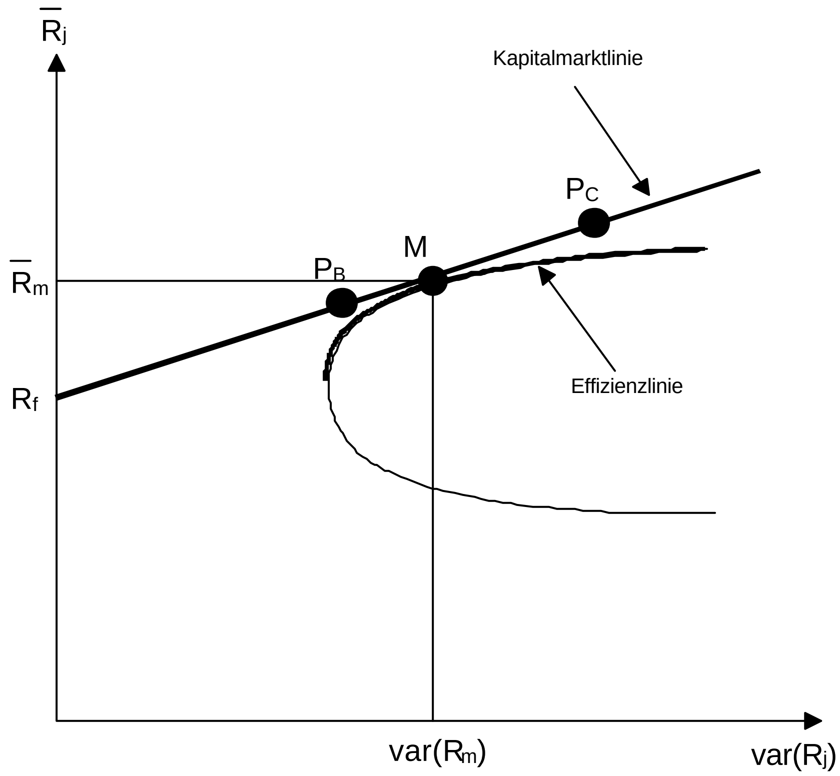


Abbildung 8: Kapitalmarktlinie.

Portfolios die in Abbildung 8 links von Punkt M (z.B. Portfolio P_B) liegen sind eine Kombination aus risikoloser Anlagemöglichkeit und risikobehaftetem Wertpapierportfolio. Durch die Möglichkeit der Mittelaufnahme können auch Rendite-Risiko-Kombinationen, die rechts von Punkt M (z.B. Portfolio P_C) liegen realisiert werden.[37]

Unter den oben aufgeführten Annahmen (Zwei-Anlage-Fall, homogene Erwartungshaltung) läßt sich die Gleichung der Kapitalmarktlinie folgendermaßen herleiten:

$\alpha_f + \alpha_m = 1$

mit

α_f = Anteil des risikolosen Vermögensgegenstandes am Gesamtportfolio

α_m = Anteil des risikobehafteten Vermögensgegenstandes am Gesamtportfolio

Die erwartete Portfoliorendite ergibt sich zu:

[37] Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 190.

$$\overline{R}_p = a_f \cdot R_f + a_m \cdot \overline{R}_m$$

$$\overline{R}_p = R_f + a_m \cdot (\overline{R}_m - R_f)$$

Die Portfoliovarianz ergibt sich mit Gleichung 2-17 und Gleichung 3-1 zu:

$$\mathrm{var}(R_p) = a_f^2 \,\mathrm{var}(R_f) + a_m^2 \,\mathrm{var}(R_m) + 2\, a_f\, a_m\, \mathrm{std}(R_f)\, \mathrm{std}(R_m)\, k_{f,m}$$

Gleichung 4-1

Da die Varianz des risikolosen Anlagewertes mit der Rendite R_f und die Korrelation zwischen dem risikolosen Anlagewert und dem Marktportfolio null ist, vereinfacht sich die Gleichung zur Berechnung der Portfoliovarianz zu:

$\mathrm{var}(R_p) = \alpha_m^2 \,\mathrm{var}(R_m)$ bzw.

$\mathrm{std}(R_p) = \alpha_m \,\mathrm{std}(R_m)$

Diese Gleichung besagt, daß die Portfoliovarianz in Zwei-Anlagen-Fall von der gewichteten Varianz des Marktportfolios abhängt.

Mit $a_m = \mathrm{std}(R_p) / \mathrm{std}(R_m)$ ergibt sich die erwartete Portfoliorendite zu:

$$\overline{R}_p = R_f + \frac{(\overline{R}_m - R_f)}{\mathrm{std}(R_m)} \cdot \mathrm{std}(R_p)$$

Gleichung 4-2

Aus der Kapitalmarktlinie ist ersichtlich, daß ein Investor für seine Bereitschaft Risiko zu tragen eine Prämie von

$$\frac{(\overline{R}_m - R_f)}{\mathrm{std}(R_m)} \cdot \mathrm{std}(R_p)$$

erwarten darf.

Das Marktportfolio umfaßt sämtliche am Markt gehandelten Anlagen. Aufgrund der Annahme homogenen Erwartungen hat das Marktportfolio gegenüber einem beliebigen Portfolio nach der Portfoliotheorie den Vorteil, daß alle Anleger anstatt eines individuellen Portfolios die gleiche Portfoliozusammensetzung haben. Lediglich die Gewichte zwischen risikoloser Anlage und Marktportfolio stellen sich gemäß der individuellen Risikobereitschaft der Anleger ein. Die optimale Vermögensaufteilung eines Anlegers ergibt sich damit aus der Lage des Tangentialpunktes zwischen der Kapitalmarktlinie und den Isonutzenkurven des Anlegers (vgl. Abbildung 9). Aus Abbildung 9 ist ersichtlich, daß das Portfolio P_2 gegenüber dem Portfolio P_1 ein höheres Risiko und damit eine höhere erwartete Rendite besitzt.[38]

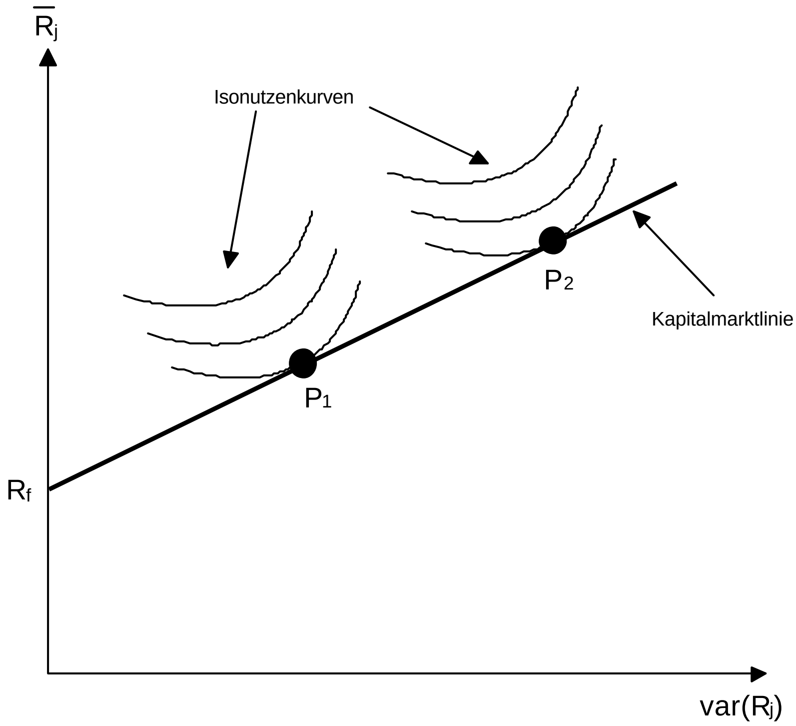


Abbildung 9: Das optimale Portfolio bei Vorliegen der Kapitalmarktlinie.[39]

4.2.2 Die Wertpapierlinie

Mit der Wertpapierlinie wird die Frage nach dem Preis einzelner Wertpapiere des Marktportfolios im Kapitalmarktgleichgewicht beantwortet. Der Gleichgewichtspreis eines Wertpapieres wird auf der Basis des Marktportfolios bestimmt. Da jedes Wertpapier im Marktportfolio gemäß seinem Anteil am Gesamtumlauf aller Wertpapiere vertreten ist, kann sein Wert in Relation zu diesem ausgedrückt wer-

[38] Vgl. Steiner, M. / Bruns, Chr. (1994): S. 19.
[39] Quelle: Steiner, M. / Bruns, Chr. (1994): S.22.

den. Als Maßstab für die Preisbestimmung wird die Rendite des Wertpapieres verwendet.[40]

Zur Preisbestimmung unter Gleichgewicht wird ein Portfolio aus α Teilen des Wertpapiers i und (1-α) Teilen des Marktportfolios M gebildet. Dies entspricht einem Zwei-Anlagen-Fall der Portfoliotheorie, d.h. die dort entwickelten Gleichungen zur Rendite und Risikobestimmung können für diesen Fall analog angewendet werden.[41]

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{R}_p = a \cdot \overline{R}_i + (1-a) \cdot \overline{R}_M \\ &\operatorname{std}(R_p) = \sqrt{a^2 \operatorname{var}(R_i) + (1-a)^2 \cdot \operatorname{var}(R_M) + 2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot \operatorname{cov}(R_i, R_M)} \end{aligned}}$$

Gleichung 4-3

Leitet man beide Gleichungen nach dem Portfolioanteil α ab, lassen sich die Auswirkungen einer Variation des Anteil des Wertpapiers i auf die Portfoliorendite und das Portfoliorisiko feststellen:

$$\frac{d\,\overline{R}_p}{d\,a} = \overline{R}_i - \overline{R}_M$$

$$\frac{d\,\operatorname{std}(R_p)}{d\,a} = \frac{a \operatorname{var}(R_i) - (a-1)\operatorname{var}(R_M) + \operatorname{cov}(R_i, R_M) \cdot (1-2a)}{\sqrt{a^2 \operatorname{var}(R_i) + (1-a)^2 \cdot \operatorname{var}(R_M) + 2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot \operatorname{cov}(R_i, R_M)}}$$

Gleichung 4-4

Bei einer Preisbestimmung im Gleichgewicht muß der Portfolioanteil des Wertpapieres i auf Null gesetzt werden. Dies läßt sich wie folgt begründen:

- Das Wertpapier i ist im Gleichgewicht mit einem Anteil α im Marktportfolio enthalten.
- Alle Investoren halten im Gleichgewicht eine Linearkombination aus Marktportfolio und risikoloser Anleihe.

---

[40] Vgl. Steiner, M. / Bruns, Chr. (1994): S. 20ff. und Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 199ff.

[41] Vgl. Gleichung 2-15 und Gleichung 2-17.

Jede zusätzliche Nachfrage nach dem Wertpapier i würde demgemäß ein Ungleichgewicht bewirken, welches zu einem anderen Gleichgewichtspreis führen würde.

Daraus folgt für die Ableitungen:

$$\left.\frac{d\,\overline{R}_p}{d\,a}\right|_{a=0} = \overline{R}_i - \overline{R}_M$$

$$\left.\frac{d\,\mathrm{std}(R_p)}{d\,a}\right|_{a=0} = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_M) - \mathrm{var}(R_M)}{\mathrm{std}(R_M)}$$

Gleichung 4-5

Das Austauschverhältnis zwischen Rendite und Risiko wird durch die Division der verbliebenen Ableitungen dargestellt.

$$\left.\frac{d\,\overline{R}_p / d\,a}{d\,\mathrm{std}(R_p) / d\,a}\right|_{a=0} = \frac{\overline{R}_i - \overline{R}_M}{\left[\mathrm{cov}(R_i, R_M) - \mathrm{var}(R_M)\right] / \mathrm{std}(R_M)}$$

Gleichung 4-6

Die rechte Seite der Gleichung 4-6 stellt das Austauschverhältnis zwischen Risiko und Rendite im Marktportfolio dar (α=0 !). Der Wert des Terms muß somit gleich der Steigung der Effizienzlinie im Punkt M sein, welche der Steigung der Kapitalmarktlinie entspricht.[42] Folglich lassen sich die Steigung der Kapitalmarktgeraden und das Austauschverhältnis von Risiko und Rendite gleichsetzen:

$$\frac{\overline{R}_M - R_f}{\mathrm{std}(R_M)} = \frac{\overline{R}_i - \overline{R}_M}{\left[\mathrm{cov}(R_i, R_M) - \mathrm{var}(R_M)\right] / \mathrm{std}(R_M)}$$

Gleichung 4-7

Durch Auflösung nach der Renditeerwartung des Wertpapiers i erhält man die Wertpapierlinie, die auch als Security Market Line (SML) bezeichnet wird:

[42] Vgl. Abbildung 8.

$$\overline{R}_i = R_f + (\overline{R}_M - R_f) \cdot \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{var}(R_M)}$$

Gleichung 4-8

Diese Gleichung besagt, daß sich die Rendite für ein einzelnes risikobehaftetes Wertpapier im Kapitalmarktgleichgewicht aus einem risikolosen Zinssatz R_f und einer Risikoprämie zusammensetzt. Die Risikoprämie ergibt sich aus dem Marktpreis des Risikos multipliziert mit der Höhe des Risikos, das durch den Ausdruck $\mathrm{cov}(R_i,R_M)/\mathrm{var}(R_M)$ gemessen wird. Zu beachten ist der die Höhe des Risikos ausdrückende Term:

Die Rendite des einzelnen Wertpapiers bestimmt sich nicht nach dem Risiko des Wertpapiers selbst, sondern ausschließlich aus dem Verhältnis der Kovarianz zwischen dem Wertpapier und dem Marktportfolio zu der Varianz des Marktportfolios.

Dieses Maß für die Risikohöhe wird durch den sogenannten Beta-Faktor ausgedrückt:

$$b_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{var}(R_M)}$$

Gleichung 4-9

Daraus folgt die mathematische Standardgleichung des CAPM:

$$\overline{R}_i = R_f + (\overline{R}_M - R_f) \cdot b_i$$

Gleichung 4-10

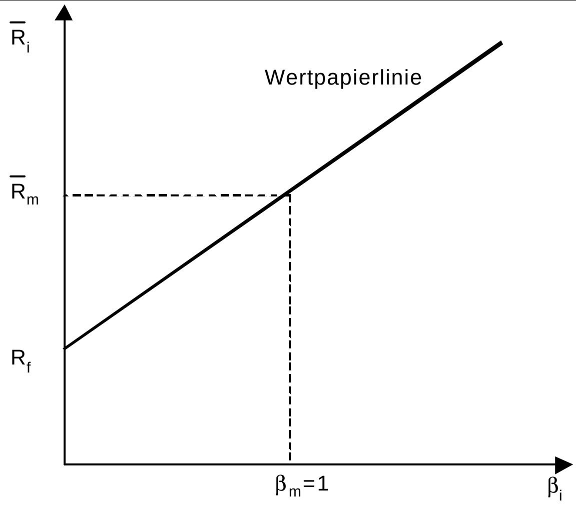


Abbildung 10: Wertpapierlinie.

Abbildung 10 zeigt beispielhaft den Verlauf einer Wertpapierlinie. Sie beantwortet auf der Basis der Kapitalmarktlinie wie ein einzelnes Wertpapier im Marktportfolio zu bewerten ist. Zusammenfassend ist festzuhalten, daß bei einer Preisbestimmung mittels des CAPM nur das systematische Risiko vergütet wird, da das unsystematische Risiko in einem Portfolio wegdiversifizierbar ist.

4.3 Die Arbitrage Pricing Theory

Einen anderen Ansatz als den des CAPM geht die Arbitrage Pricing Theory (APT). Hierbei wird davon ausgegangen, daß der Preis eines Wertpapieres linear von H „Faktoren" abhängt. Der Unterschied zum CAPM liegt darin, daß die Rendite eines Wertpapiers gemäß dem CAPM ausschließlich von dem systematischen Marktrisiko und dem unsystematischen Risiko des Wertpapiers selbst abhängt. Diese Annahme wird im APT durch die H Faktoren verallgemeinert. Vorstellbar sind dabei sowohl makro- als auch mikroökonomische Faktoren. Bei makroökonomischen Faktoren ist an Inflations-, Zins- und Konjunkturentwicklung, Ölpreise, Arbeitslosigkeit, etc. zu denken. Mikroökonomische Faktoren können sein:

Unternehmensgröße, Verschuldungsgrad, Kurs-Gewinn-Verhältnis, Dividenden-rendite, etc.[43]

Damit kann das CAPM als ein Spezialfall der APT angesehen werden.

Die APT geht von folgender grundlegender Annahme aus:

Im Marktgleichgewicht müssen die Arbitragebedingungen

- daß das System ist in sich geschlossen ist und es somit, es gibt keinen externen (Geld-)Mittelzufluß gibt sowie
- die Unmöglichkeit der Realisierung risikoloser Arbitragegewinne

erfüllt sein.

Die allgemeine Gleichung der APT lautet:

$$\tilde{R}_i = \overline{R}_i + \sum_{j=1}^{H} b_{i,j} \cdot F_j + e_i$$

$\tilde{R}_i$: Zufällige Rendite des i – ten Wertpapiers
F_j : j – ter Faktor
$b_{i,j}$: Sensitivität des i – ten Wertpapiers bezüglich dem j – ten Faktor
e_i : Unsystematische Rendite

Gleichung 4-11

Die Herleitung der APT soll an einem Beispiel mit drei Wertpapieren verdeutlicht werden. Hierbei wird die Änderung der Rendite bei einer Umschichtung zwischen den Portfoliowertpapieren betrachtet.

[43] Vgl. Steiner, M. / Bruns, Chr.: S. 24ff.

$$\Delta\tilde{R}_p = \Delta V_1 \cdot \overline{R}1 + \Delta V_2 \cdot \overline{R}2 + \left[\Delta V_1 \cdot b_{1,1} + \Delta V_2 \cdot b_{2,1}\right]F_1 + \left[\Delta V_1 \cdot b_{1,2} + \Delta V_2 \cdot b_{2,2}\right]F_2 + \left[\Delta V_1 \cdot e_1 + \Delta V_2 \cdot e_2\right]$$

Gleichung 4-12

ΔV_i sind hierbei die auf den Gesamtwert des Portfolios bezogenen, relativen, durch die Umschichtung des Portfolios bedingten, Änderungen des i-ten Wertpapiers.

Gleichung 4-12 zeigt, daß die Änderung der Portfoliorendite vom systematischen und vom unsystematischen Risiko abhängt. Wie in Kapitel 3.2 gezeigt wurde, kann das unsystematische Risiko durch eine ausreichend große Anzahl Wertpapiere eliminiert werden. Damit vereinfacht sich Gleichung 4-12 zu:

$$\Delta\tilde{R}_p = \Delta V_1 \cdot \overline{R}1 + \Delta V_2 \cdot \overline{R}2 + \left[\Delta V_1 \cdot b_{1,1} + \Delta V_2 \cdot b_{2,1}\right]F_1 + \left[\Delta V_1 \cdot b_{1,2} + \Delta V_2 \cdot b_{2,2}\right]F_2$$

Gleichung 4-13

Unter Berücksichtigung der Annahme, daß Arbitragegewinne nicht möglich sind, darf sich das systematische Risiko bezüglich eines Faktors bei einer Portfoliumbildung nicht ändern. Daher muß gelten:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 \cdot b_{1,1} + \Delta V_2 \cdot b_{2,1} &= 0 \\ \Delta V_1 \cdot b_{1,2} + \Delta V_2 \cdot b_{2,2} &= 0 \end{aligned} \qquad F_j ?\ 0$$

Damit reduziert sich Gleichung 4-13 zu:

$$\Delta\tilde{R}_p = \Delta V_1 \cdot \overline{R}1 + \Delta V_2 \cdot \overline{R}2$$

Gleichung 4-14

Aufgrund der Annahme eines abgeschlossenen Systems müssen sich auch die Änderungen DV_i gegenseitig aufheben, so daß:

$DV_1 + DV_2 = 0$

Weiterhin darf durch die Umschichtung innerhalb des Portfolios die Rendite des Gesamtportfolios nicht mehr steigen:[44]

$$\Delta V_1 \cdot \overline{R}_1 + \Delta V_2 \cdot \overline{R}_2 = 0$$

Gleichung 4-15

Für ein Arbitrageportfolio mit den genannten Eigenschaften gelingt es, die als Grundgleichung der APT bekannte Formel für die Rendite einzelner Wertpapiere bzw. für Wertpapierportfolios im Kapitalmarktgleichgewicht abzuleiten.[45] Diese lautet für H Faktoren:

$$\overline{R}_i = R_f + \sum_{j=1}^{H} b_{i,j} \cdot (\overline{R}_{Fj} - R_f)$$

$$\overline{R}_{Fj} - R_f : \text{Risikoprämie des j-ten renditebestimmenden Faktors}$$

Gleichung 4-16: APT-Modell.

4.4 Grundlagen der mehrperiodischen Betrachtung

Die bisherigen Ausführungen erfolgten unter der Restriktion eines Zwei-Perioden-Modells. Die Anwendung eines Zwei-Perioden-Modells in der Praxis führt unvermeidbar zu Approximationsfehlern. Durch eine mehrperiodische Betrachtung lassen sich diese Fehler vermeiden. In diesem Kapital soll daher ein einführender Überblick über die Preisbildung unter Berücksichtigung von mehreren Perioden gegeben werden.

Zur Veranschaulichung wird das in Kapitel 2.2 dargestellte Zwei-Perioden-Modell beispielhaft in ein Drei-Perioden-Modell unter Unsicherheit erweitert (vgl. Abbildung 11). Die Indizierung eines Zustandes erfolgt mit x_{st}, wobei s dem Zustand und t der Periode entspricht. Daraus läßt sich die mit Preisen versehene Arrow-Debreu-Rückzahlungsmatrix formulieren. Die Spalten repräsentieren die

---

[44] Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 208.
[45] Vgl. Steiner, M. / Bruns, Chr. (1994): S. 26.

jeweiligen Wertpapiere, die Zeilen die Rückzahlungen in Abhängigkeit von der betrachteten Periode und dem betrachteten Zustand (vgl. Abbildung 12).

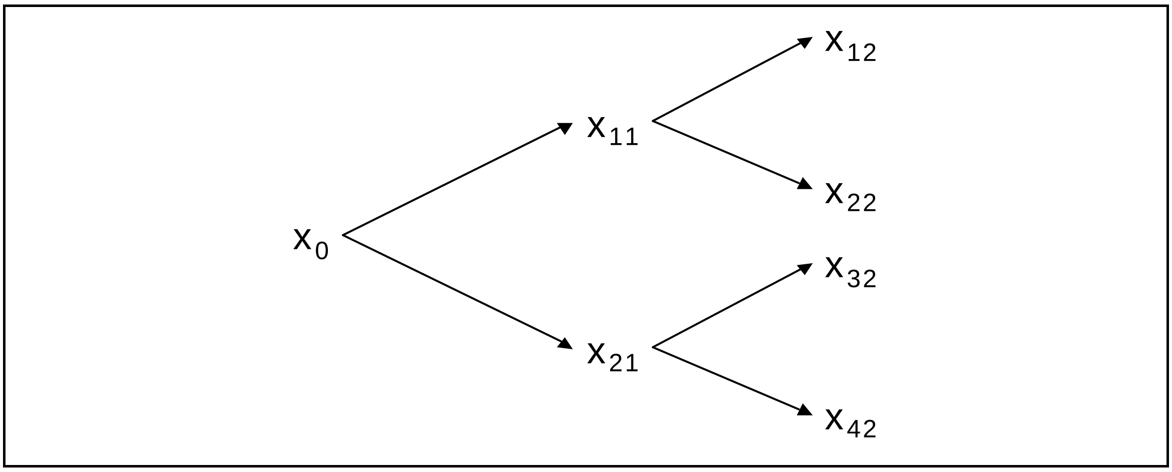


Abbildung 11: Drei-Perioden-Marktmodell.

Wertpapiere

		11	**21**	**12**	**22**	**32**	**42**
t0	**0**	-p(11)	-p(21)	-p(12)	-p(22)	-p(32)	-p(42)
t1	**11**	1	0	0	0	0	0
	21	0	1	0	0	0	0
t2	**12**	0	0	1	0	0	0
	22	0	0	0	1	0	0
	32	0	0	0	0	1	0
	42	0	0	0	0	0	1

Abbildung 12: Arrow-Debreu-Rückzahlungsmatrix.[46]

Das Konsumentenproblem kann folgendermaßen formuliert werden:

[46] Quelle: Milne, F. (1995): S. 90.

Max U(**x**)

Mit der Nebenbedingung

$$x = \bar{x} + \mathbf{R} \bullet \mathbf{a} \qquad und$$
$$\mathbf{a}^T = [a(11),...,a(42)]$$

Die Bedingung für die Lösung des Konsumentenproblems lautet:[47]

$$\nabla U\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Gleichung 4-17

Dies bedeutet, daß für alle Konsumenten die Grenzrate der Substitution gleich und somit ein Pareto-Optimaler Zustand erreicht ist. Dabei ist ∇U gleich dem Arrow-Debreu-Preisvektor **p**.[48]

Auf Grundlage der Basis Arrow-Debreu-Welt kann der Preis für ein weiteres Wertpapier k, welches zum ersten mal im Zustand 11 zum Preis $p_k(11)$ gehandelt wird und die Auszahlungen $R_k(12)$ und $R_k(22)$ bei den entsprechenden Zuständen hat, wie folgt ermittelt werden:

Das Wertpapier k hat den Auszahlungsvektor:

	k
11	-pk(11)
21	0
12	Rk(12)
22	Rk(22)
32	0
42	0

Aus Gleichung 4-17 folgt für die um das Wertpapier k erweiterte Rückzahlungsmatrix für das Wertpapier k:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{R}_k = \mathbf{0}$$

[47] Vgl. Milne, F. (1995): S. 90.
[48] Vgl. Milne, F. (1995): S. 91.

Durch Ausmultiplizieren der Matrizen läßt sich der Preis für das Wertpapier ermitteln:[49]

$$p(11)p_k(11) = p(12)R_k(12) + p(22)R_k(22)$$
$$p_k(11) = \frac{p(12)}{p(11)}R_k(12) + \frac{p(22)}{p(11)}R_k(22)$$

Gleichung 4-18

Die Verallgemeinerung des Modells erfolgt durch die Addition weiterer Auszahlungsvektoren zu der Rückzahlungsmatrix sowie durch das Hinzufügen eines „Handelswertes" in den Vektor **a**.[50]

[49] Vgl. Milne, F. (1995): S. 92.
[50] Vgl. Milne, F. (1995): S. 92.

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden aufbauend auf den Erkenntnissen der Portfoliotheorie, deren zentrales Thema die Konstruktion effizienter Portfolios unter der Annahme risikoaverser Investoren ist, Kapitalmarktmodelle beschrieben.

Durch die Einführung eines risikolosen Wertpapiers liegen alle effizienten Portfolien auf der Kapitalmarktlinie, welche eine Linearkombination aus risikofreiem Wertpapier und Marktportfolio darstellt.

Die Beschreibung der Kapitalmarkttheorie erfolgt anhand der Grundmodelle CAPM und APT. Das CAPM ist ein Modell zur Beschreibung des Verhältnisses zwischen Risiko und Rendite. Hierbei wird von folgenden Annahmen ausgegangen:[51]

- Einen Investition hat sich nach den Größen Risiko und Rendite auszurichten.
- Entscheidungsrelevant für die Aufnahme eines Wertpapieres in ein Portfolio ist nicht das individuelle Risiko des Wertpapiers sondern die Veränderung des Portfoliorisikos durch die Aufnahme des Wertpapieres.
- Risiko kann in zwei Kategorien aufgeteilt werden: Systematisches und unsystematisches Risiko.
- Die Renditeerwartungen eines Investors dürfen sich nur auf das systematische Risiko stützen.

Die Reduzierung der Erklärung von Wertpapierrenditen auf einen Faktor (Rendite und Risiko des Marktportfolios) im Rahmen des CAPM hat zur Entwicklung der APT geführt. Das Fundament der APT ist ein in sich geschlossenes Arbitragegebäude, in welchem das Risiko eines Wertpapieres durch mehrere Faktoren abgebildet wird.

Die Berücksichtigung von Zeithorizonteffekten erfolgt in mehrperiodischen Modellen, deren Gegenstand exemplarisch anhand der Erweiterung des Zwei-Perioden-Modells aufgezeigt wurde.

---

[51] Vgl. Fabozzi, F. / Modigliani, F. (1996): S. 211.

Literaturverzeichnis

Breuer, Wolfgang: Finanzintermeditation im Kapitalmarktgleichgewicht, Wiesbaden 1993.

Bleymüller, Josef / Gehlert, Güther / Gülicher, Herbert: Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, München 1992.

Fabozzi, Frank J. / Modigliani, Franco: Capital Markets – Institutions and Instruments, New Jersey 1996.

Firchau, V.: Portfolio decisions and capital market equilibria under incomplete information, hrsg. v. Insitut für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie der Universität Augsburg, Augsburg 1985.

Hirshleifer, J.: Investments Decisions under Uncertainty: Choice Theoretic Approaches, in: Quarterly Journal of Economics, 79/1965, S. 509 – 536.

Hörnstein, Elke: Arbitrage- und Gleichgewichtsmodelle in der Kapitalmarkttheorie: Eine vergleichende Analyse der CAPM- und APT-Ansätze unter Berücksichtigung ihrer empirischen Überprüfbarkeit, Diss. an der Universität Mannheim, Frankfurt a.M., Bern, New York, Paris 1990.

Leser, Hartmut: Das Capital Asset Pricing-Modell und seine Anwendung auf Probleme des internationalen Kapitalmarktes, Diss. an der Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1989.

Leusner, John / Akhavein, Jalal D. / Swamy, P.A.V.B.: Solving an empirical puzzle in the Capital Asset Pricing Model, in: Finance and Economics Discussion Series 1996-14, Federal Reserve Board, Washington DC 1996.

Lintner, J.: The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, in: Review of Economic Statistics Feb. 1965, S. 13 - 37.

Magill, Michael J.P / Quinzii, Martine: Theory of Incomplete Markets, Cambridge, 1996.

Markowitz, H.: Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, New York, 1959.

Merton, Robert C.: An intertemporal Capital Asset Pricing Model, in: Econometrica, 41/1973, S. 867 – 887.

Milne, Frank: The induced preference approach to arbitrage and diversification arguments in finance, in: European Economic Review 31/1987, S. 235 – 245.

Milne, Frank: Arbitrage and diversification in a general equilibrium asset economy, in: Econometrica, 56/1988, S. 815 – 840.

Milne, Frank: Finance theory and asset pricing, Oxford, 1996.

Mossin, J.: Equlibrium in a Capital Asset Market, in: Econometrica, 34/1966, S. 768 – 783.

Nowak, Thomas: Faktormodelle in der Kapitalmarkttheorie, hrsg. v. Prof. M. Steiner, Köln 1994.

Peridon, Louis / Steiner, Manfred: Finanzwirtschaft der Unternehmung, 5. Aufl., München, 1988.

Sharpe, W.: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, in: Journal of Finance, 19(3)/1964: S. 425 – 443.

Steiner, M. / Bruns, Chr.: Wertpapiermanagement 2. Aufl., Stuttgart, 1994.

Varian, Hal R.: Mikroökonomie, hrsg. v. Prof. Arthur Woll, München 1994.